

王鹏飞, 李建平, 丁瑞强, 等. 2012. Lorenz 系统误差方程的吸引子特性研究 [J]. 气候与环境研究, 17 (5): 574-582, doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2012.11037. Wang Pengfei, Li Jianping, Ding Ruiqiang, et al. 2012. Studies of the attractor property of error equations for the Lorenz system [J]. Climatic and Environmental Research (in Chinese), 17 (5): 574-582.

# Lorenz 系统误差方程的吸引子特性研究

王鹏飞<sup>1,2,3</sup> 李建平<sup>2</sup> 丁瑞强<sup>2</sup> 黄荣辉<sup>1</sup>

1 中国科学院大气物理研究所季风系统研究中心, 北京 100190

2 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

3 中国科学院研究生院, 北京 100049

**摘要** 将 Lorenz 方程及其导出的误差方程作为联立方程 (即全误差方程) 来研究误差的性质, 结果表明联立方程可以变换为一个特殊的算子方程, 误差轨线将收敛于一个有限的区域; 此外联立方程对应的流的散度为负值, 因此其在相空间中的体积不断收缩, 最终趋向一个低纬曲面; 联立方程的这两个性质使得 Lorenz 系统中初始误差不会无限放大, 而是趋于一个吸引子。误差在吸引子上的概率分布是确定的, 因此平均的绝对误差趋于常数, 这个结果可以用来解释小初始误差经过一段时间的发展之后, 趋向饱和的现象。利用稳定性分析方法研究了误差吸引中心的位置和个数, 并使用数值试验进行了验证, 结果显示误差吸引子的结构与解的吸引子位置、数量和结构均有不同。最后本研究将针对 Lorenz 方程的误差联立方程方法拓展到一般的常微分动力系统, 展示了对一般误差方程的特征矩阵进行分析, 研究其特征行列式性质的方法, 得到了一般误差系统中稳定点和平衡态性质与原动力系统的稳定点和平衡态性质的关系, 这些结果对于认识误差系统长期的动力学行为和性质是有意义的。

**关键词** Lorenz 方程 误差吸引子 稳定性

**文章编号** 1006-9585 (2012) 05-0574-09

**中图分类号** P435

**文献标识码** A

doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2012.11037

## Studies of the Attractor Property of Error Equations for the Lorenz System

WANG Pengfei<sup>1,2,3</sup>, LI Jianping<sup>2</sup>, DING Ruiqiang<sup>2</sup>, and HUANG Ronghui<sup>1</sup>

1 Center for Monsoon System Research, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190

2 State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

3 Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

**Abstract** The simultaneous equation from the Lorenz model and its error equation without linear approximation were obtained in this study. Theoretical analysis revealed that the simultaneous equation can be transformed to a special operator equation with a property such that all the orbits obtained from the equation will converge to a finite volume. In addition, the equation demonstrates that the divergence of the flow has a negative value, which implies that the volume of the orbit in phase space approaches zero; therefore, all points will be attracted to a low-level dimensional curve surface. These two properties of the simultaneous equation make the evolution of error for the Lorenz system approach

**收稿日期** 2011-03-11 收到, 2012-02-07 收到修定稿

**资助项目** 国家重点基础研究发展计划项目 2011CB309704, 国家重点基础研究发展计划项目 2009CB421405, 国家海洋局海洋—大气化学与全球变化重点实验室开放基金 GCMAC0804

**作者简介** 王鹏飞, 男, 1973 年出生, 博士, 高级工程师, 主要从事数值分析、并行计算、非线性可预报性等方面的研究。E-mail: wpf@mail.iap.ac.cn

to an attractor. The mean absolute error is constant due to the certainty of probability density distribution of the error attractor; this property can be used to understand the phenomena of a small error in the Lorenz system saturating after a lengthy integration. The location and the number of attractor's centers are obtained from the stability analysis method, and the results are validated by numerical experiments. The figure of error attractor shows that it differs from the solution's attractor in location, number, and structure. Moreover, the authors demonstrated a method of extending this error analysis for the Lorenz equation to general ordinary differential equations (ODEs). The property of error equations for ODEs has been obtained, and the relationships between the locations of stable points and stability properties for error systems and ordinary systems are reported.

**Key words** Lorenz equation, error attractor, stability

## 1 引言

混沌动力系统的研究起源于 Poincare (1890), 而后被许多研究者逐步发展和完善。在微分方程定性理论中, Lyapunov 指数是一种常用的分析动力系统性质的方法 (Oseledec, 1968)。Lyapunov 指数可以刻画动力系统初始误差的整体 (长期) 平均增长速率, 为分析动力系统的特性提供了重要信息。当动力系统至少存在一个正的 Lyapunov 指数时, 表示系统初始临近轨道随时间是发散的, 系统是混沌的。如果初始误差为  $\delta_0$  而允许的最大误差记为  $\Delta$ , 最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  可以用来定义混沌系统的可预报期限:

$$T_p \sim \frac{1}{\lambda_{\max}} \ln \left( \frac{\Delta}{\delta_0} \right), \quad (1)$$

(Eckmann and Ruelle, 1985; Wolf et al. 1985; Lorenz, 1996)。Lyapunov 指数度量了混沌系统的全局特征。为了研究吸引子的局部动力特征, Yoden and Nomura (1993)、Kazantsev (1999)、Ziehmann et al. (2000) 提出了局部或有限时间 Lyapunov 指数。相对于全局 Lyapunov 指数, 局部 Lyapunov 指数可以更有效地展示吸引子的时空结构, 有明显的优越性。但为了避开非线性处理的困难, 很多局部 Lyapunov 指数都是在假定初始误差足够小、误差的演化能够用切线性 (tangent linear model, TLM) 模式来描述的情况下得到的。这就带来了一个弊端: 线性近似已经被证明有很大的局限性, 特别是只能应用于误差增长的初期一段很短的时间内。为了克服这种缺陷, 非线性局部 Lyapunov 指数方法 (nonlinear local Lyapunov exponents, NLLE) 近来被发展出来 (李建平等, 2006; 丁瑞强, 2007; Ding and Li, 2007)。NLLE 使用原始的非线性方程 (不做线性近似) 来考虑

误差的平均发展率和误差的饱和规律, 得到了许多新结果, 并且能够运用到实际的天气和气候可预报问题研究中。

使用微分方程的定性理论在研究非线性动力系统轨道的空间结构、混沌吸引子等方面取得了巨大的成功, 而使用非线性局部 Lyapunov 指数在研究误差的发展规律、可预报性方面有着重要的应用价值。以往的误差理论在误差发展规律的研究方面多集中于切线性模式, 为了避免线性近似的缺陷, 借鉴误差的非线性发展理论的做法, 我们对非线性的误差发展方程进行研究。本文将原始非线性方程和它对应的误差方程系统合在一起看作一个广义的微分动力系统, 应用定性理论分析此误差系统长期的动力学行为和性质, 进而研究误差发展空间中的吸引子的结构, 这对认识误差发展的规律是有重要意义的。

## 2 Lorenz 方程的误差方程及其稳定点

Lorenz (1963) 通过定性分析和数值试验指出一个确定的非线性动力系统可以有非常复杂的解, 他所使用的 Lorenz63 方程被广泛用于混沌和可预报性方面的研究。Lorenz63 方程可以写为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\sigma$ 、 $r$ 、 $b$  是无量纲常数 (本文中取参数  $\sigma=10$ ,  $r=28.0$ ,  $b=8/3$ ),  $t$  为无量纲时间。记初值为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 初值误差的向量为  $(u_0, v_0, w_0)$ ,  $t$  时刻的误差为  $(u, v, w)$ , 则误差的发展方程满足:

$$\begin{cases} \frac{d(x+u)}{dt} = -\sigma(x+u) + \sigma(y+v), \\ \frac{d(y+v)}{dt} = r(x+u) - (y+v) - (x+u)(z+w), \\ \frac{d(z+w)}{dt} = (x+u)(y+v) - b(z+w), \end{cases} \quad (3)$$

即

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\sigma u + \sigma v, \\ \frac{dv}{dt} = ru - v - xw - zu - uw, \\ \frac{dw}{dt} = uv - bw + xv + yu, \end{cases} \quad (4)$$

联立 (2) 和 (4) 得方程组 (5):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \\ \frac{du}{dt} = -\sigma u + \sigma v, \\ \frac{dv}{dt} = ru - v - xw - zu - uw, \\ \frac{dw}{dt} = uv - bw + xv + yu, \end{cases} \quad (5)$$

共 6 个变量, 有 6 个方程, 可以求得  $(x, y, z, u, v, w)$  的解。由于误差向量的发展与方程 (2) 的解向量是紧密耦合在一起的, 因此需要研究方程 (5) 才能得到误差发展的规律。

对于方程 (5) 可研究其稳定点问题, 即求解

$$\begin{cases} 0 = -\sigma x + \sigma y, \\ 0 = rx - y - xz, \\ 0 = xy - bz, \\ 0 = -\sigma u + \sigma v, \\ 0 = ru - v - xw - zu - uw, \\ 0 = uv - bw + xv + yu, \end{cases} \quad (6)$$

它的解如下: 对于  $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$

$$\text{有 3 组解: } \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}, \begin{cases} u = \sqrt{b(r-1)} \\ v = \sqrt{b(r-1)} \\ w = r-1 \end{cases}, \begin{cases} u = -\sqrt{b(r-1)} \\ v = -\sqrt{b(r-1)} \\ w = r-1 \end{cases}.$$

$$\text{对于 } \begin{cases} x = \sqrt{b(r-1)}, \\ y = \sqrt{b(r-1)}, \\ z = r-1, \end{cases}$$

$$\text{有 3 组解: } \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}, \begin{cases} u = -\sqrt{b(r-1)} \\ v = -\sqrt{b(r-1)} \\ w = -r+1 \end{cases}, \begin{cases} u = -2\sqrt{b(r-1)} \\ v = -2\sqrt{b(r-1)} \\ w = 0 \end{cases}.$$

$$\text{对于 } \begin{cases} x = -\sqrt{b(r-1)}, \\ y = -\sqrt{b(r-1)}, \\ z = r-1, \end{cases}$$

$$\text{有另外 3 组解: } \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}, \begin{cases} u = \sqrt{b(r-1)} \\ v = \sqrt{b(r-1)} \\ w = -r+1 \end{cases}, \begin{cases} u = 2\sqrt{b(r-1)} \\ v = 2\sqrt{b(r-1)} \\ w = 0 \end{cases}.$$

不考虑  $(x, y, z)$  的变化, 只考虑  $(u, v, w)$  的吸引中心, 可以发现误差的吸引子的中心有 7 个 (9 个解中去掉 2 个重合的误差中心点), 分别为

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}, \begin{cases} u = -\sqrt{b(r-1)} \\ v = -\sqrt{b(r-1)} \\ w = -r+1 \end{cases}, \begin{cases} u = -2\sqrt{b(r-1)} \\ v = -2\sqrt{b(r-1)} \\ w = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{b(r-1)} \\ v = \sqrt{b(r-1)} \\ w = -r+1 \end{cases}, \begin{cases} u = 2\sqrt{b(r-1)} \\ v = 2\sqrt{b(r-1)} \\ w = 0 \end{cases}, \begin{cases} u = -\sqrt{b(r-1)} \\ v = -\sqrt{b(r-1)} \\ w = r-1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{b(r-1)} \\ v = \sqrt{b(r-1)} \\ w = r-1 \end{cases}. \text{ 若只研究 } (u, v) \text{ 的二维图形, 不考}$$

虑  $w$  的变化则为 5 个中心区, 这与解的吸引子中心在位置和数量上是不同的 (解的定点个数为 3)。

图 1a 为通过数值试验得到的误差  $(u, v, w)$  在  $(u, v)$  平面上的投影, 可见较为明显的有 5 个中心区 (由于不考虑  $w$  的作用,

$$\begin{cases} u = -\sqrt{b(r-1)} \\ v = -\sqrt{b(r-1)} \\ w = -r+1 \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} u = -\sqrt{b(r-1)} \\ v = -\sqrt{b(r-1)} \\ w = r-1 \end{cases} \text{ 重合;}$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{b(r-1)} \\ v = \sqrt{b(r-1)} \\ w = -r+1 \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} u = \sqrt{b(r-1)} \\ v = \sqrt{b(r-1)} \\ w = r-1 \end{cases} \text{ 重合),}$$

与图 1b 中解  $(x, y, z)$  在  $(x, y)$  平面上投影明显不同, 图 1b 中的中心区域可以明显地看出来为 3 个 (0 点及两个吸引子中心)。误差的图像中除了中心区的位置和数量不同, 轨迹的分布形式也更为复杂。

### 3 误差方程定点附近的稳定性分析

方程 (5) 一共有 9 个平衡点, 知道了这些平衡点后, 可以用经典的微分方程理论分析方程 (5) 在平衡点附近的变化趋势。对方程 (5) 在定点附近做小参数展开, 略去高阶项得

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = -\sigma x' \sigma y', \\ \frac{dy'}{dt} = rx' - y' - x'z - xz', \\ \frac{dz'}{dt} = x'y + xy' - bz', \\ \frac{du'}{dt} = -\sigma u' + \sigma v', \\ \frac{dv'}{dt} = ru' - v' - x'w - xw' - z'u - zu' - u'w - uw', \\ \frac{dw'}{dt} = u'v + uv' - bw' + x'v + xv' + y'u + yu', \end{cases} \quad (7)$$

它的线性化矩阵为:

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (r-z) & -1 & -x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \sigma & 0 \\ -w & 0 & -u & (r-z-w) & -1 & (-x-u) \\ v & u & 0 & (y+v) & (x+u) & -b \end{bmatrix}. \quad (8)$$

对于

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \text{ 且 } \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} u=0, \\ v=0, \\ w=0, \end{cases}$$

线性化矩阵 (8) 变为

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad (9)$$

它的特征值为  $\lambda$ , 特征方程为

$$(\lambda + b)^2 [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)]^2 = 0.$$

特征方程的解为

$$\lambda_1 = -b, \lambda_{2,3} = -(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)} / 2,$$

$$\lambda_4 = -b, \lambda_{5,6} = -(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)} / 2.$$

当  $r < 1$  时, 是稳定吸引点;  $r = 1$  时, 为分叉点;  $r > 1$  时, 原点变为不稳定鞍点, 同时出现新的平衡态。

对于第二组解

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \text{ 且 } \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} u = \sqrt{b(r-1)}, \\ v = \sqrt{b(r-1)}, \\ w = r-1, \end{cases}$$

方程 (8) 变为

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \sigma & 0 \\ -w & 0 & -u & 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ v & u & 0 & \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{bmatrix}. \quad (10)$$

方程 (10) 的特征方程为

$$\begin{aligned} & [\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1)](\lambda + b) \cdot \\ & [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

对于第三组解

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \text{ 且 } \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} u = -\sqrt{b(r-1)}, \\ v = -\sqrt{b(r-1)}, \\ w = r-1, \end{cases}$$

方程 (8) 变为

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \sigma & 0 \\ -w & 0 & -u & 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ v & u & 0 & -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{bmatrix}, \quad (12)$$

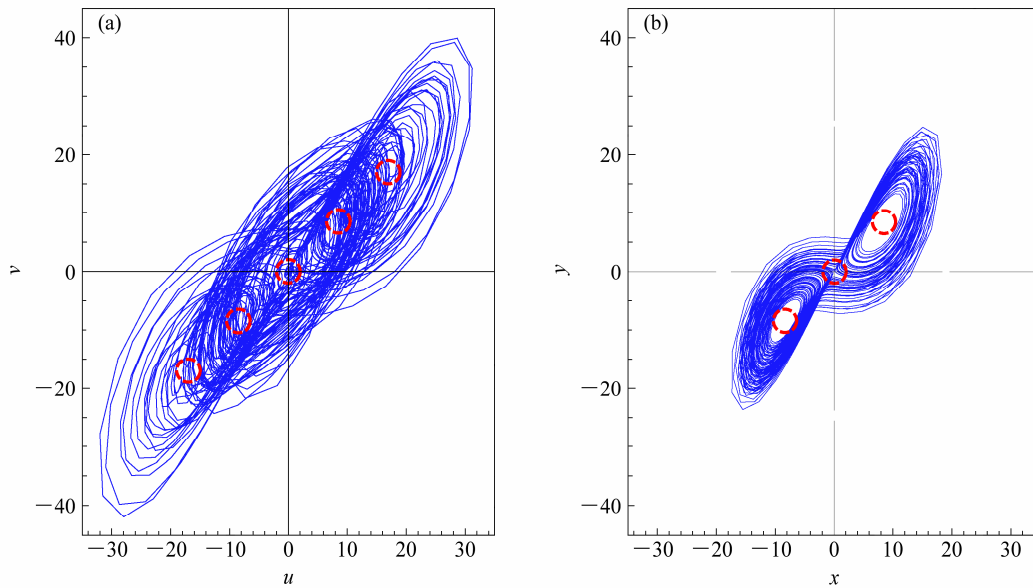


图 1 方程 (5) 计算所得的  $t \in [0, 100]$  时刻的数值解, 初值为  $(x_0, y_0, z_0) = (5, 10, 5)$ 、 $(u_0, v_0, w_0) = (0.01, 0.01, 0.01)$  (红色虚线所示区域为稳定点的位置): (a) 误差  $(u, v, w)$  在  $(u, v)$  平面上的投影; (b) 变量  $(x, y, z)$  在  $(x, y)$  平面上的投影

Fig. 1 The solution of Equation 5 for time  $t \in [0, 100]$  with the initial condition  $(x_0, y_0, z_0) = (5, 10, 5)$  and  $(u_0, v_0, w_0) = (0.01, 0.01, 0.01)$  (the red dashed line indicates the location of the stable points): (a) The projection of error  $(u, v, w)$  in  $(u, v)$  plane; (b) the projection of the variable  $(x, y, z)$  in  $(x, y)$  plane

方程 (12) 的特征方程为

$$\begin{aligned} & [\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1)](\lambda + b) \cdot \\ & [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

对其它的 6 组解, 重复这个过程可以发现: 虽然线性化矩阵的阶数为 6, 但方程 (8) 特征根的值与 Lorenz 方程的特征根值是一样的(详细证明见第 5 节)。在进行稳定性分析时, 关注的是复数根中实部的正负号问题, 以确定系统是渐近稳定还是发散, 因此关于 Lorenz 方程中  $r$  的取值范围经典分析也适用于这个误差方程。即当  $1 < r < 24.74$  时, 有稳定的平衡态,  $r > 24.74$  时为混沌状态。

#### 4 误差方程的吸引性质

证明一个光滑的微分动力系统存在吸引子和存在混沌吸引子是两个不同的问题。一般来说, 证明存在吸引子只需要证明其轨道收敛到一个不变的点集即可。而混沌吸引子除了这个要求以外还需要证明其对初值的敏感性, 因此是更为困难的。混沌吸引子的存在性证明一般使用的是 Silnikov 方法或判据 (Silva, 1993), 而吸引子的存在性证明可以采用丑纪范 (1983)、李建平和丑纪范 (1997) 的方法。

对方程组 (5) 做如下变换:

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y, \\ Z = z - r - \sigma, \\ U = x + u, \\ V = y + v, \\ W = z + w - r - \sigma, \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} + \sigma X - \sigma Y = 0, \\ \frac{dY}{dt} + \sigma X + Y + XZ = 0, \\ \frac{dZ}{dt} - XY + bZ = -b(r + \sigma), \\ \frac{dU}{dt} + \sigma U - \sigma V = 0, \\ \frac{dV}{dt} + \sigma U + V + UW = 0, \\ \frac{dW}{dt} - UV + bW = -b(r + \sigma). \end{cases} \quad (14)$$

记算子

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & U \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -U & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix},$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b(r+\sigma) \\ 0 \\ 0 \\ -b(r+\sigma) \end{pmatrix}.$$

则方程 (14) 可以改写为算子方程:

$$B \frac{d\varphi}{dt} + (N + L)\varphi = \xi. \quad (15)$$

定义内积:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 + U_1 U_2 + V_1 V_2 + W_1 W_2,$$

若对任意  $\varphi^*$ ,

$$(\varphi^*, A\varphi) = (\varphi, A^* \varphi^*),$$

则称  $A^*$  为  $A$  的伴随算子. 特别地是,

$$(\varphi, \varphi) = X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 + V^2 + W^2 = |\varphi|^2,$$

这是相空间中点  $\varphi$  同原点的距离. 对  $B$ 、 $N$ 、 $L$  分别求出其伴随算子, 有:

$$B^* = B, \quad L^* = L, \quad N^* = -N.$$

又根据内积的定义知:

$$(\varphi, B\varphi) = X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 + V^2 + W^2 \geq 0,$$

所以  $B$  为正定的, 同理  $L$  也为正定的.

以  $\varphi$  对方程 (15) 做内积有:

$$\left(\varphi, B \frac{d\varphi}{dt}\right) + (\varphi, N\varphi) + (\varphi, L\varphi) = (\varphi, \xi), \quad (16)$$

由

$$(\varphi, N\varphi) = 0, \quad \left(\varphi, B \frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{1}{2} \frac{d|\varphi|^2}{dt},$$

可得:

$$\frac{1}{2} \frac{d|\varphi|^2}{dt} = (\varphi, \xi) - (\varphi, L\varphi) = -\sigma X^2 - Y^2 - bZ^2 - b(r+\sigma)Z - \sigma U^2 - V^2 - bW^2 - b(r+\sigma)W, \quad (17)$$

因为

$$\sigma X^2 + Y^2 + bZ^2 + b(r+\sigma)Z + \sigma U^2 + V^2 + bW^2 + b(r+\sigma)W = 0 \quad (18)$$

是一个 6 维的椭球, 这个椭球外的点使得  $d|\varphi|^2/dt < 0$ , 现在寻找一个 6 维的球体

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 + V^2 + W^2, \quad (19)$$

其中  $R$  为半径, 使得它刚好将公式 (18) 所定义的椭球包含在内. 这实际上是求解  $R^2$  在公式 (18) 约束下的条件极值问题, 使用拉格朗日乘数法可以解出来  $R^2$  数值. 由于距离原点大于  $R$  点也在椭球 (18) 的外面, 因此  $d|\varphi|^2/dt < 0$ , 即向  $R^2$  所定义的球内收缩; 而距离原点小于  $R$  的点也无法跑到  $R^2$  所定义的球外.

Kalnay (2002) 研究 Lorenz63 模型时以流的散度

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b)$$

来研究方程 (2) 的耗散性. 仿照 Kalnay (2002) 的做法, 可以定义公式 (14) 对应的散度:

$$\begin{aligned} \text{div} \cdot V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = \\ &= -2(\sigma + 1 + b) = -82/3, \end{aligned}$$

因此  $t \rightarrow \infty$  每个小的体积元都缩小到 0 (缩成一个曲面). 最终, 误差方程描述的轨道都趋向于  $R^2$  所定义的球内的一个低维曲面上, 即误差方程存在全局吸引子.

由于全局吸引子的存在, 动力系统的长期状态取决于吸引子的性质, 与初值无关. 而且可以据此研究许多误差方程的数学性质, 例如:

定理: 当  $t \rightarrow \infty$  时 Lorenz 误差方程的平均绝对误差趋于常数.

证明: 记  $E = ui_u + vj_v + wk_w$  表示误差向量, 定义模

$$\|E\| = \|ui_u + vj_v + wk_w\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

为误差的绝对值, 而  $t \rightarrow \infty$  时误差在吸引子空间的概率分布函数为  $p(u, v, w, x, y, z)$ , 则误差的平均值为:

$$\bar{E} = \iiint \iiint \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

$$p(u, v, w, x, y, z) du dv dw dx dy dz, \quad (20)$$

其中积分区域为公式 (19) 所定义的球内, 当  $p(u, v, w, x, y, z)$  确定时,  $\bar{E}$  为常数, 可以称为平

均饱和误差。

## 5 一般误差方程的平衡点及其附近的稳定性问题

定义一个常微分系统：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (21)$$

其中  $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为函数。方程 (21) 对应的定点问题为：

$$\begin{cases} 0 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ 0 = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ 0 = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (22)$$

设求解方程组 (22) 得到的稳定点为  $m$  个，其中第  $k$  个稳定点记为  $X^k = (X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k)$ ，则方程组 (21) 对应的误差发展系统为：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{d(x_1 + e_1)}{dt} = F_1(x_1 + e_1, x_2 + e_2, \dots, x_n + e_n), \\ \frac{d(x_2 + e_2)}{dt} = F_2(x_1 + e_1, x_2 + e_2, \dots, x_n + e_n), \\ \vdots \\ \frac{d(x_n + e_n)}{dt} = F_n(x_1 + e_1, x_2 + e_2, \dots, x_n + e_n), \end{cases} \quad (23)$$

其中  $e_i$  为误差（注意误差不是小量），方程组 (23) 对应的定点问题为：

$$\begin{cases} 0 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ 0 = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ 0 = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ 0 = F_1(x_1 + e_1, x_2 + e_2, \dots, x_n + e_n), \\ 0 = F_2(x_1 + e_1, x_2 + e_2, \dots, x_n + e_n), \\ \vdots \\ 0 = F_n(x_1 + e_1, x_2 + e_2, \dots, x_n + e_n), \end{cases} \quad (24)$$

可以看出方程组 (24) 中的前  $n$  个方程构成的方程组同方程组 (22)，因此  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的定点个数也为  $m$  个，且与方程组 (22) 的解相同。

对方程组 (24) 中的后  $n$  个方程，做变量替换  $y_i = x_i + e_i$ ，转化为：

$$\begin{cases} 0 = F_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ 0 = F_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \vdots \\ 0 = F_n(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (25)$$

可见方程组 (25) 同方程组 (22)，因此  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  的定点个数也为  $m$  个，且与方程组 (22) 的解相同。对于  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  的第  $k$  个定点有如下关系：

$$\begin{cases} X_1^k = x_1 + e_1, \\ X_2^k = x_2 + e_2, \\ \vdots \\ X_n^k = x_n + e_n, \end{cases}$$

其中  $1 \leq k \leq m$ ，而  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  可以为  $m$  个定点中的任意一个，即

$$\begin{cases} X_1^k = X_1^l + e_1, \\ X_2^k = X_2^l + e_2, \\ \vdots \\ X_n^k = X_n^l + e_n, \end{cases}$$

其中  $1 \leq k \leq m$ ，所以

$$\begin{cases} e_1 = X_1^k - X_1^l, \\ e_2 = X_2^k - X_2^l, \\ \vdots \\ e_n = X_n^k - X_n^l, \end{cases}$$

即误差的稳定点为方程组 (22) 的稳定点两两做减法的组合，有  $m^2$  个稳定点（可能包含重根）。

知道了误差的稳定点之后，根据动力系统稳定性的理论，只要研究方程组 (23) 的线性化系统的特征值问题，就能知道误差系统在稳定点附近的性质。

对应方程组 (21) 的线性化系数矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中  $a_{ij} = \partial F_i / \partial x_j (X = X^k)$ （即每个平衡点处，给出的一套  $a_{ij}$ ，这里只考虑 1 阶线性化的情形）。而对于

误差方程组 (23), 线性化系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中  $b_{ij} = \partial F_i / \partial x_j (X = X^l)$ , 且记

$$\beta = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

矩阵 (26) 对应的特征值方程为  $\lambda I - A = 0$ , 每个定点对应一组特征值  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , 共有  $m$  组。误差方程 (27) 的特征值方程可化为:  $(\lambda I - A)(\lambda I - \beta) = 0$ , 而  $(\lambda I - \beta) = 0$  得到的  $m$  组特征值为  $\lambda I - A = 0$  得到的  $m$  组特征值的另一个排列, 因此并没有产生新的特征值, 而且最大的特征值  $\lambda_{\max}$  也相同, 因此对于矩阵 (26) 中各参数的取值而引起的平衡点特性的结果, 也适用于误差方程。

## 6 小结

将 Lorenz 方程及其导出的误差方程作为联立方程来研究误差的性质, 对联立方程的稳定性分析表明, Lorenz 系统的全误差方程共有 9 个平衡点, 如果只考虑误差定点的位置 (不考虑解的定点位置), 那么误差的平衡点为 7 个。误差方程可以改写为一个特殊的算子方程, 误差轨线将收敛于一个有限的区域, 此外误差方程对应的流的散度为负值, 因此其在相空间中的体积不断收缩, 最终趋向一个低纬曲面, 在相空间中趋向于体积为 0 的不变点集, 因此误差方程具有吸引子。当  $t \rightarrow \infty$  时, 误差  $(u, v, w)$  的轨迹在吸引域中的概率分布是确定的, 因此平均饱和误差  $\bar{E}$  是确定的常数。这个结果可以解释小初始误差经过一段时间的发展之后, 趋向饱和的现象。

除了讨论 Lorenz 方程, 本文还把针对 Lorenz 方程的误差联立方程方法拓展到一般的常微分动力系统, 展示了对一般误差方程的特征矩阵进行分析研究其特征行列式性质的方法, 得到了一般误差系统中相应的稳定点和平衡态性质与原动力系统的稳定点和平衡态性质的关系。结果表明, 误差方

程对应的特征方程并没有引入与原方程不同的特征值, 而只排列顺序上有所不同, 因此原方程的稳定性分析和判据也适用于误差方程。

将全误差方程看作一个广义的微分动力系统来进行研究的好处是明显的, 这使得我们可以将全部的研究动力系统的理论、方法和工具直接用于误差的研究和分析。应用定性理论分析全误差系统长期的动力学行为和性质, 进而研究误差发展空间中的吸引子的结构, 这对认识误差发展的规律是有重要意义的。本文的研究中得到了 Lorenz 系统误差发展的平衡点、稳定性判据、吸引性质等以前未被误差增长理论所描述的性质, 其结果除了可以解释平均饱和误差趋于常数的现象外, 还可以进一步用来讨论预报期限等可预报性问题。本文只证明了误差方程具有全局的吸引子, 更进一步可以使用 Silnikov 方法来研究这个吸引子是否为混沌吸引子, 这些问题将在下一步的工作中予以研究。

**致谢** 感谢两名审稿人提出的细致而且有价值的建议, 对提高本文质量有很大帮助。

## 参考文献 (References)

- 丑纪范. 1983. 初始场作用的衰减与算子的特征 [J]. 气象学报, 41 (4): 385-392. Chou Jifan. 1983. Some properties of operators and the effect of initial condition [J]. Acta Meteorologica Sinica (in Chinese), 41 (4): 385-392.
- 丁瑞强. 2007. 非线性误差增长理论与可预报性研究 [D]. 中国科学院大气物理研究所博士学位论文, 192pp. Ding Ruiqiang. 2007. Nonlinear error dynamics and predictability study [D]. Ph.D. dissertation (in Chinese), Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, 192pp.
- Ding R Q, Li J P. 2007. Nonlinear finite-time Lyapunov exponent and predictability [J]. Physics Letters A, 364 (5): 396-400.
- Eckmann J P, Ruelle D. 1985. Ergodic theory of chaos and strange attractors [J]. Reviews of Modern Physics, 57 (3): 617-656.
- Kalnay E. 2002. Atmospheric Modeling, Data Assimilation, and Predictability [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 364pp.
- Kazantsev E. 1999. Local Lyapunov exponents of the quasi-geostrophic ocean dynamics [J]. Applied Mathematics and Computation, 104 (2-3): 217-257.
- 李建平, 丑纪范. 1997. 大气吸引子的存在性 [J]. 中国科学 (D 辑), 27 (1): 87-96. Li Jianping, Chou Jifan. 1997. Existence of atmosphere attractor [J]. Science in China (Ser. D) (in Chinese), 40 (2): 215-224.
- 李建平, 丁瑞强, 陈宝花. 2006. 大气可预报性研究的回顾与展望, 21 世纪初大气科学前沿与展望 [M]. 北京: 气象出版社, 96-104. Li



- Jianping, Ding Ruiqiang, Chen Baohua. 2006. Review and Prospect on the Study of Atmospheric Predictability, Frontier and Prospect of Atmospheric Sciences at the Beginning of the 21th Century (in Chinese) [M]. Beijing: China Meteorological Press, 96-104.
- Lorenz E N. 1963. Deterministic nonperiodic flow [J]. *J. Atmos. Sci.*, 20 (2): 130-141.
- Lorenz E N. 1996. Predictability: A Problem Partly Solved [M]. Proc. ECMWF Seminar on Predictability, Vol. I, Reading, United Kingdom, ECMWF, 1-18.
- Oseledec V I. 1968. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems [J]. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 19: 197-231.
- Poincare H. 1890. Sur le Probleme des Trois Corps et les Equations de la Dynamique [J]. *Acta Mathematica*, 13 (1):A3-A270.
- Silva C P. 1993. Shilnikov's theorem—A tutorial [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 40 (10): 675-682.
- Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. 1985. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. *Physica D*, 16 (3): 285-317.
- Yoden S, Nomura M. 1993. Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability [J]. *J. Atmos. Sci.*, 50 (11): 1531-1543.
- Ziehmann C, Smith L A, Kurths J. 2000. Localized Lyapunov exponents and the prediction of predictability [J]. *Physics Letters A*, 271 (4): 237-251.